سوال:

فرض کنید یک ماتریس بالا مثلثی باشد. اگر عناصر قطری آن همگی غیر صفر باشند، آنگاه

الف) اثبات کنید که ستون‌های مستقل خطی‌اند.

ب) اگر همگی عناصر قطری آن غیرصفر نباشند، این نتیجه گیری برقرار خواهد بود یا خیر؟

پاسخ:

الف) فرض کنید یک ستون از و وکتور صفر با سایز باشد. می‌دانیم ستون‌های ماتریس مستقل خطی‌اند اگر و تنها اگر پاسخ دستگاه وکتور باشد.

ماتریس بالا مثلثی زیر را در نظر بگیرید:

معادله منجر به دستگاهی با معادله و متغیر خواهد شد، که برای یافتن جواب آن ماتریس افزوده را در نظر میگیریم.

از آنجا که بالا مثلثی است، میتوانیم با back-substitution آن را حل کنیم. از پایین ترین سطر آن شروع میکنیم و معادله را داریم، از آنجا که عنصر قطری است پس طبق فرض مقدار آن غیر صفر خواهد بود و داریم .

سپس برای سطر بعدی معادله را خواهیم داشت و از

آنجا که و خواهیم داشت .

و به همین ترتیب همه به ازای صفر خواهند شد. بنابراین جواب دستگاه خواهد بود، پس ستون‌های مستقل خطی‌اند.

ب)‌ خیر، مثال نقض: .